异质性与内生性同行效应模型及Stata应用

王群勇（南开大学数量经济研究所 & 经济行为与政策模拟实验室）

2024年8月20号，南开大学，天津

内容

同行效应

异质性同行效应: `snreghnet`

内生性同行效应: `snregenet`

同行效应

linear-in-means model：

$$y_i = \alpha + \gamma x_i + \delta \frac{1}{d_i} \sum_{j \in N_i} x_j + \lambda \frac{1}{d_i} \sum_{j \in N_i} y_j + \epsilon_i$$

其中，d_i为i的邻居数量。

γ：个体效应（individual effect）

δ: 情景效应（contexture effect）

λ：内生同行效应（endogenous peer effect）

设x_i包含k个变量，模型共包含$2k+2$个参数。

严格外生: $E(\epsilon_i|x, G) = 0$，模型中x与G是外生的。

内生: $E(\epsilon_i|x, G) \neq 0$?

关系矩阵

$$y = \alpha 1 + \gamma x + \delta G x + \lambda G y + \epsilon.$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{13} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

权重矩阵的元素为0或1，表示是否存在连接。

如果权重矩阵做归一化（行和为1），即相当于同行的均值的影响（linear-in-means)。权重矩阵本身相当于同行的加总的影响（称之为Linear-in-sums模型）。

权重矩阵的不同的规范化得到不同的结果，具有不同的含义。比如，吸烟行为的同行效应。个体i有一个朋友，每天吸10支烟。个体j有两个朋友，每个朋友每天吸10支烟。

其他统计量 (linear-in-*)

可以采用其他指标（中位数、标准差、最小值、最大值、分位数等）：

$$y = \alpha 1 + \gamma x + \delta s(G,x) + \lambda s(G,y) + \epsilon.$$

其中，$s(G,x)$, $s(G,y)$表示x和y的统计指标（标准差、最大值、最小值、分位数等）。

同行效应

模型

$$\begin{aligned} y &= \alpha 1 + \gamma x + \lambda G y + \epsilon, \\ y &= (I - \lambda G)^{-1}(\alpha + \gamma x + \epsilon). \\ E(y|x) &= \alpha (I - \lambda G)^{-1} 1 + \gamma (I - \lambda G)^{-1} x, \end{aligned} \tag{1}$$

令$C_k = \gamma_k (I - \lambda G)^{-1}$，$C_{ij}$体现个体$j$的$x_k$对个体$i$的$E(y|x)$的边际效应;

第i行体现其他个体对个体i的边际影响，第j列体现个体j对其他个体的边际影响。i行的均值体现其他个体对个体i的平均边际效应，j列的均值体现个体j对其他个体的平均边际效应。

C_k的非对角线元素的均值即为x_k的平均间接效应。

当权重矩阵的行（列）和为1时，C_k的各行（列）之和为常数。

同行效应的工具变量估计

由$(I-\lambda G)^{-1}=I+\lambda G+\lambda^2G^2+\cdots$，可得，

$$
\begin{aligned}
E(y|x) &= \alpha(I-\lambda G)^{-1}1+\gamma(I-\lambda G)^{-1}x \\
&= \tilde{\alpha}1+\tilde{\gamma}_0x+\tilde{\gamma}_1Gx+\tilde{\gamma}_2G^2x+\tilde{\gamma}_3G^3x+\cdots
\end{aligned}
$$

因此，$(Gx, G^2x, G^3x, \cdots)$是Gy的合适的工具变量。G^kx表示k阶同行的x的均值。

类似地，对于模型

$$
\begin{aligned}
y &= \alpha1+\gamma x+\delta Gx+\lambda Gy+\epsilon, \qquad (2) \\
E(y|x) &= \tilde{\alpha}1+\tilde{\gamma}_0x+\tilde{\gamma}_1Gx+\tilde{\gamma}_2G^2x+\tilde{\gamma}_3G^3x+\cdots
\end{aligned}
$$

因此，$(G^2x, G^3x, \cdots)$是Gy的合适的工具变量。G^kx表示k阶同行的x的均值。

定理：设网络G是连接的，且$\delta+\gamma\lambda\neq 0$，那么模型（1）是可识别的当且仅当$(I, G, G^2)$线性独立。模型（2）是可识别的当且仅当$(I, G, G^2, G^3)$线性独立。

极大似然估计

其它有效的工具变量：二阶同行的x的和（或方差等统计量）。

极大似然估计:

$$ln(L) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln|\Omega| - \frac{1}{2}\epsilon'\Omega^{-1}\epsilon.$$

其中，$\Omega = \sigma^2(I - \lambda G)^{-1}(I - \lambda G')^{-1}$.

只有外生变量的加权均值的情况，可以直接用OLS估计：

$$y = \alpha 1 + \gamma x + \delta G x + \epsilon.$$

内容

同行效应

异质性同行效应: `snreghnet`

内生性同行效应: `snregenet`

异质性同行效应

Beugnot et al. (2019), (Bramoullé 2013; Arduini et al. 2019a,b)：

- 男性与女性对其他人的影响不同；
- 受到男同行的影响与女同行的影响不一样。

异质性同行效应（BP模型）

设$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_0 + \lambda_1 z_i)$表示由向量构成的对角矩阵，第一种形式（列异质性）

$$y = \alpha[I - \Lambda G]^{-1}1 + \gamma x + \epsilon.$$

其中，ΛG是将向量$(\lambda_0 + \lambda_1 z_i)$分别与$G$的每一列进行元素相乘。$\lambda_1$衡量了个体对同行的外溢效应的大小。$\lambda_1$越大，表明个体对同行的影响越大（或者对同行越有用）。

第二种形式（行异质性）

$$y = \alpha[I - G\Lambda]^{-1}1 + \gamma x + \epsilon.$$

其中，$G\Lambda$是将向量$(\lambda_0 + \lambda_1 z_i)$分别与$G$的每一行进行元素相乘。$\lambda_1$衡量了个体受到同行的影响，$\lambda_1$越高，表明个体越容易受到同行的影响（或者越能充分利用同行效应）。

如果$\lambda = 0$，模型退化为同质模型。

异质性同行效应（BLP模型）

列异质性：

$$y = (I - \Lambda G)^{-1}(\alpha + \gamma x + \epsilon).$$

行异质性：

$$y = (I - G\Lambda)^{-1}(\alpha + \gamma x + \epsilon).$$

附：集中对数似然函数

线性回归模型：

$$y = x\beta + u, \epsilon \sim N(0, \sigma^2 I_n).$$

y_i的似然函数（概率密度函数）为：

$$f(y_i|\beta, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y_i - x_i\beta)'(y_i - x_i\beta)}{2\sigma^2}\right).$$

$(y_1, \cdots, y_n)$的对数似然函数为：

$$lnf(y|\beta, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{(y - x\beta)'(y - x\beta)}{2\sigma^2}.$$

将$\sigma^2 = \epsilon'\epsilon/n$带入,可得：

$$lnf(y|\beta) = -\frac{n}{2}\ln\left(2\pi\frac{\epsilon'\epsilon}{n}\right) - \frac{\epsilon'\epsilon}{2\epsilon'\epsilon/n} = -\frac{n}{2}\ln(2\pi + 1) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2).$$

ML估计

一般的空间回归模型:

$$y = x\beta + W_x x\gamma + \lambda W_y y + u = X_a\xi + \lambda W_y y + u$$

$$u = \rho W_u + \epsilon, \epsilon \sim N(0, \sigma^2 I_n).$$

其中, $X_a = (x, W_x x)$, $\xi = (\beta', \gamma')'$.

简化模型为:

$$y = (I_n - \lambda W_y)^{-1} X_a\xi + (I_n - \lambda W_y)^{-1}(I_n - \rho W_u)^{-1}\epsilon.$$

$\epsilon = (I_n - \rho W_u)[(I_n - \lambda W_y)y - X_a\xi]$, 似然函数为:

$$lnf(y|\xi, \lambda, \rho, \sigma^2) = -\frac{n}{2} - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) + \ln|I_n - \lambda W_y| + \ln|I_n - \rho W_u| - \frac{1}{2\sigma^2}\epsilon'\epsilon$$

ML估计

如果已知(λ,ρ),

$$(I_n-\rho W_u)(I_n-\lambda W_y)y=(I_n-\rho W_u)X_a\xi+\epsilon,$$

给定(λ,ρ), ξ的ML估计量为

$$\hat{\xi}=[X_a'(I_n-\rho W_u)'(I_n-\rho W_u)X_a]^{-1}X_a'(I_n-\rho W_u)'(I_n-\rho W_u)y,$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{\epsilon'\epsilon}{n},$$

将其带入似然函数，得到集中对数似然函数，

$$lnf_c(y|\lambda,\rho)=-\frac{n}{2}[\ln(2\pi)+1]-\frac{n}{2}\ln(\sigma^2(\lambda,\rho))+\ln|I_n-\lambda W_y|+\ln|I_n-\rho W_u|.$$

对lnf_c求极值，得到$(\hat{\lambda},\hat{\rho})$，进而得到$(\hat{\xi},\hat{\rho})$.

利用格点搜索法设置(λ,ρ)的初始值。

SAR的ML估计

对于SAR模型，给定λ, ξ的ML估计量为

$$\hat{\xi} = (X_a' X_a)^{-1} X_a' (I_n - \lambda W_y) y$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} [(I_n - \lambda W_y) y - X_a \hat{\xi}(\lambda, \rho)]' [(I_n - \lambda W_y) y - X_a \hat{\xi}(\lambda, \rho)]$$

将其带入似然函数，得到集中对数似然函数，

$$lnf_c(y|\lambda, \rho) = -\frac{n}{2}[\ln(2\pi) + 1] - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2(\lambda)) + \ln|I_n - \lambda W_y|.$$

对lnf_c求极值，得到$\hat{\lambda}$，进而得到$\hat{\xi}$.

利用格点搜索法设置λ的初始值。

存在孤点情况下的SAR估计

如果存在部分孤点，设SAR的$W_y = G$，可以分解为

$$G = \begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, (I - \lambda G)^{-1} = \begin{pmatrix} (I - \lambda G_1)^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

设对应的样本量分别为(n_1, n_0)，残差分别为(ϵ_1, ϵ_0)，似然函数为(n_1, n_0)两部分的似然函数之和，

$$\ln(L) = -\frac{n_1}{2}[\ln(2\pi) + 1] - \frac{n_1}{2}\ln(\sigma^2(\lambda)) + \ln|I_{n_1} - \lambda G_1| - \frac{n_0}{2}[\ln(2\pi) + 1] - \frac{n_0}{2}\ln(\sigma^2).$$

异质性同行效应模型: Stata

`snreghnet` *varlist* [*if*] [*in*] , [`rowx` (*varname*) `colx` (*varname*) `wmata` (*matrix*) `vce` (*string*) `bs` (50) `vbias` (*varname*) `nolog` `level` (95)]